$\mathbb{Z}[\sqrt{\varepsilon}]$, $\sqrt{\varepsilon}$ irrationnel, est euclidien pour $-3 < \varepsilon < 4$

(i) Soit $N : \mathbb{Z}[\sqrt{\varepsilon}] \longrightarrow \mathbb{N}$

$$a+\sqrt{\varepsilon}\, b \longmapsto |a^2-2b^2|$$

- N est définie positive
- N est multiplicative $N(x)N(y) = N(xy)$

On peut donc étendre N à $\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon})$

(ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{\varepsilon}]$ est euclidien pour N

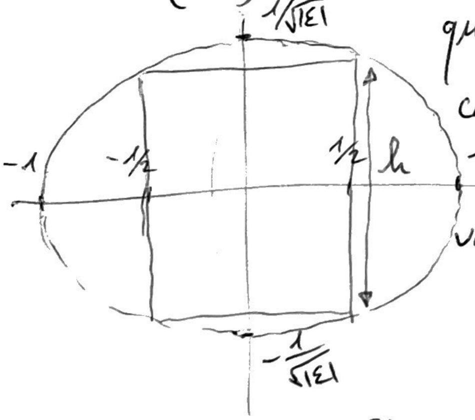
ssi $\forall a,q \in \mathbb{Z}[\sqrt{\varepsilon}], q \neq 0, \exists b,r \in \mathbb{Z}[\sqrt{\varepsilon}], a = bq+r, N(r) < N(q)$

ssi $\forall \frac{a}{q} \in \mathbb{Q}[\sqrt{\varepsilon}], \exists b \in \mathbb{Z}[\sqrt{\varepsilon}], N\left(\frac{a}{q}-b\right) < 1$

Ce qu'on réécrit : $\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2, \exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2, \left|(x-a)^2 - \varepsilon(y-b)^2\right| < 1$

et on s'est ramené à l'étude de coniques.

(iii) __Cas $\varepsilon < 0$__ : l'ellipse centrée en (a,b) doit contenir un point entier quelque soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ ce qui revient à dire que l'ellipse centrée en O contient un carré de côté 1.

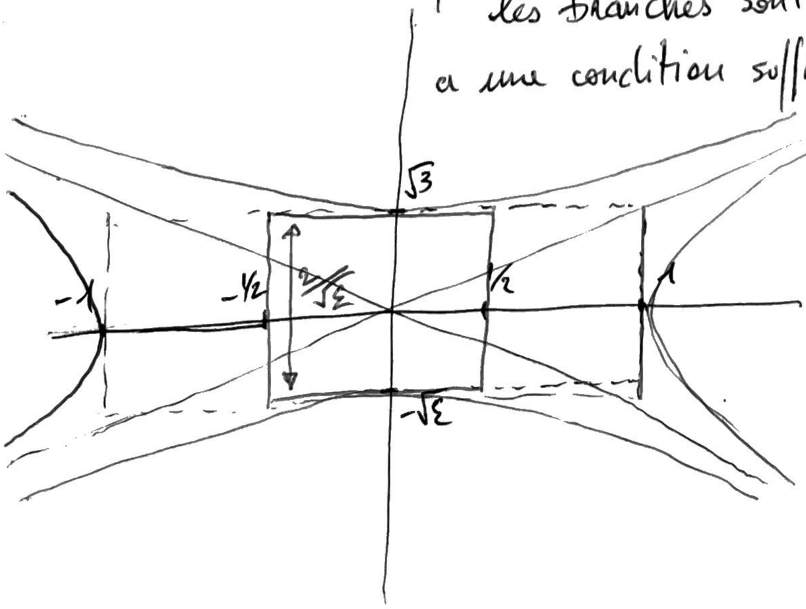


Le plus grand carré est centré et de hauteur h vérifiant $\frac{1}{2} - \varepsilon\left(\frac{h}{2}\right)^2 \leq 1$ soit $h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{|\varepsilon|}}$

$h > 1$ revient donc à $\varepsilon > -3$

(iv) __Cas $\varepsilon > 0$__ : cette fois c'est la partie du plan entre deux hyperboles qui doit contenir un point entier.

Les branches sont plus complexes à traiter, mais on a une condition suffisante au centre : $\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} > 1$ soit $\varepsilon < 4$



__Finalement__ : $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[i]$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

sont euclidiens